数理解析研究所講究録
1007 巻 1997 年 115-138

Information inequalities in the non-regular case

筑波大・数学　庄野 宏 (Hiroshi Shono)

1　はじめに

パラメトリックモデルにおける未知母数の推定問題に関して, 正則条件下での Cramér-Rao の情報不等式を基にして改良を加え, 非正則な場合に適用出来るようにしたものとして, いろいろな形の不等式が提案されている. その中では, Chapman-Robbins や Kiefer によるものがよく知られているが ([CR51], [K52]), 密度関数の台に関する条件からこれらの不等式を位置母数の場合に適用できないことも多い. また, 最近上記の場合を含む非正則推定論を様々な視点から統一的に展開しようという試みも行われている ([AT95]). 本論では主に密度関数が有界な台を持つ, いわゆる切断分布モデルについて位置母数の推定問題を考えるが, このモデルに適用可能なものとして, Vincze が提案した情報不等式 ([V79], [V92], 以後 Vincze の不等式と呼ぶ) を取り上げて考察する. この不等式は前提条件が比較的緩いことから, 非正則分布に関して広く適用出来る. しかし, 一方ではその不偏性の条件から, 等号が成立する推定量を求めにくい面も持っている. 実際, いくつかの切断分布のモデルについては, 後に示すように等号が成立する場合の推定量が具体的に求められるのが標本の次元が 1 などの極端な場合に限られる. そればかりか, 推定目標であり統計家が設定すべきである母数の関数形が, 不偏性の条件から定まることさえも起こりうる. そこで, 本稿では Vincze の不等式から不偏性の条件を外し, 二乗損失による危険関数, すなわち平均二乗誤差 (MSE) の場合への拡張を試み, 新しい不等式を導出する. また, その Bayes 危険への応用をも合わせて考え, 不等式の下界の評価とその達成条件について考察する. 尚, 一般に位置母数の推定に関して Pitman 推定量が minimax 性を持つことが知られており ([GS51]), 危険関数が母数に依存しない場合には, これら一連の情報不等式で与えられる下界は Pitman 推定量の値を評価していることにほかならない. そのため, ここでは主に局所的な場合を考えることとする.

2 Vinczeの情報不等式

この節では, 不偏推定量の分散の下界を評価する情報不等式を [V79] に従って定義し, その導出過程から等号が成立する条件を求める. そして, 切断分布モデルの位置母数の推定に際して, 不偏性の条件が局所的な等号成立条件に制約を与えていることを, 具体例を用いて考察する. また, 局所的に分散0となる不偏推定量を用いた (不等式の等号が成立する) 例についても, 合わせて考察する.

まず, $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_n)$ をある σ–有限測度 μ に対する密度 $p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)$ ($x\in\mathcal{X}\subset\mathbf{R}^n;\theta\in\Omega\subset\mathbf{R}$) を持つ分布 $P_\theta^{(n)}=P^{(n)}(\cdot|\theta)$ からの標本とし, $T_n(\mathbf{X})$ を θ の実数値関数 $g(\theta)$ の推定量とする. また, $\theta\neq\theta'$ のとき $g(\theta)\neq g(\theta')$ であると仮定し, 密度の台, 母数の情報量等を次のように表記する.

$$
\begin{aligned}
A_\theta &= \{\mathbf{x}\,|\,p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)>0\},\\
\theta' &= \theta+\delta \qquad (0<\delta<\mu(A_\theta)),\\
p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta') &= (1-\alpha)\,p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)+\alpha\,p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') \qquad (0<\alpha<1),\\
\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') &= \int_{A_\theta\cup A_{\theta'}}\frac{\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')-p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\}^2}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')}d\mu(\mathbf{x}),\\
I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') &= \alpha\,(1-\alpha)\,\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')=1-\int_{A_\theta\cap A_{\theta'}}\frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\,p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')}d\mu(\mathbf{x})
\end{aligned}
$$

2.1 Vinczeの不等式とその等号成立条件

まず, 良く知られているSchwarzの不等式について述べる.

補題 2.1 (Schwarzの不等式) 実数値関数 $h(\mathbf{x}),g(\mathbf{x})$ に対し $E\,[\{h(\mathbf{X})\}^2]<\infty, E\,[\{k(\mathbf{X})\}^2]$ $<\infty$ ならば

$$\Big\{E[\,h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})\,]\Big\}^2\leq E\left[\{h(\mathbf{X})\}^2\right]E\left[\{k(\mathbf{X})\}^2\right]$$

が成り立つ. また, $E\,[\{h(\mathbf{X})\}^2]>0$ とするとき, 不等式で等号が成立するための必要十分条件は

$$k(\mathbf{x})=\frac{E[\,h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})\,]}{E\,[\{h(\mathbf{X})\}^2]}\,h(\mathbf{x}) \quad \text{a. e.}$$

と表されることである.

(証明) 任意の $t\in\mathbf{R}$ に対し

$$E\left[\{th(\mathbf{X})+k(\mathbf{X})\}^2\right]=E\left[\{h(\mathbf{X})\}^2\right]\,t^2+2\,E[\,h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})\,]\,t+E\left[\{k(\mathbf{X})\}^2\right]\geq 0$$

より, 判別式が

$$D = \{E[h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})]\}^2 - E\left[\{h(\mathbf{X})\}^2\right] E\left[\{k(\mathbf{X})\}^2\right] \le 0$$

となり, その不等式が示される. また, 不等式で等号が成立するのは

$$E\left[\{th(\mathbf{X}) + k(\mathbf{X})\}^2\right] = 0 \quad ({}^\forall t \in \mathbf{R})$$

より

$$t\,h(\mathbf{x}) + k(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{a. e.} \quad \text{すなわち} \quad k(\mathbf{x}) = -t\,h(\mathbf{x}) \quad \text{a. e.} \tag{2.1}$$

のときに限られる. 一方, $E[\{th(\mathbf{X}) + k(\mathbf{X})\}^2]$ は t の 2 次関数であり, $E[\{h(\mathbf{X})\}^2] > 0$ であるから, 不等式の値は

$$t = -\frac{E[h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})]}{E[\{h(\mathbf{X})\}^2]} \tag{2.2}$$

のとき最小となる. ここで, (2.2) を (2.1) に代入すると, 求める結果が得られる. ∎

定理 2.1 (Vincze の不等式 [V79]) $g(\theta)$ の任意の不偏推定量 $T_n(\mathbf{X})$ に対して

$$(1-\alpha)\mathrm{Var}_\theta[T_n(\mathbf{X})] + \alpha\mathrm{Var}_{\theta'}[T_n(\mathbf{X})] \ge \alpha(1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}^2 \left\{\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} - 1\right\} \tag{2.3}$$

が成り立つ.

(証明) まず

$$\hat{\alpha}(\mathbf{X}) = \frac{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)}$$

とおくと, 不偏性の条件

$$E_\theta[T_n(\mathbf{X})] = g(\theta) \quad ({}^\forall \theta \in \Omega)$$

より

$$E_\alpha[\hat{\alpha}(\mathbf{X})] = \int_{A_\theta \cup A_{\theta'}} \hat{\alpha}(\mathbf{x})\, p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')d\mu(\mathbf{x}) = \alpha \qquad (0 <^\forall \alpha < 1)$$

が得られる. また, 補題 2.1 で $h(\mathbf{x})$, $k(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})$ をそれぞれ $\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\}/p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')$, $\hat{\alpha}(\mathbf{x}) - \alpha$, $p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')$ とおくと

$$E[h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})] = \int_{A_\theta \cup A_{\theta'}} \{\hat{\alpha}(\mathbf{x}) - \alpha\} \left\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\right\} d\mu(\mathbf{x}) = 1$$

になる. そして, Schwarz の不等式より

$$\begin{aligned}
1 &= \{E[h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})]\}^2 \le E\left[\{h(\mathbf{X})\}^2\right] E\left[\{k(\mathbf{X})\}^2\right] \\
&= \int_{A_\theta \cup A_{\theta'}} \frac{\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\}^2}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')} d\mu(\mathbf{x}) \int_{A_\theta \cup A_{\theta'}} (\hat{\alpha}(\mathbf{x}) - \alpha)^2 p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')d\mu(\mathbf{x}) \\
&= \mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') \cdot \mathrm{Var}_\alpha[\hat{\alpha}(\mathbf{X})]
\end{aligned}$$

となり

$$\mathrm{Var}_\alpha[\,\hat{\alpha}(\mathbf{X})\,] \geq \frac{1}{\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} = \frac{\alpha\,(1-\alpha)}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} \tag{2.4}$$

を得る. 次に

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_\alpha[\,\hat{\alpha}(\mathbf{X})\,] &= E_\alpha\left[\{\hat{\alpha}(\mathbf{X})\}^2\right] - \{E_\alpha[\,\hat{\alpha}(\mathbf{X})\,]\}^2 \\
&= \frac{E_\alpha[\{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)\}^2]}{\{g(\theta') - g(\theta)\}^2} - \alpha^2 \\
&= \frac{(1-\alpha)\mathrm{Var}_\theta[\,T_n(\mathbf{X})\,] + \alpha\mathrm{Var}_{\theta'}[\,T_n(\mathbf{X})\,] + \alpha\,\{g(\theta') - g(\theta)\}^2}{\{g(\theta') - g(\theta)\}^2} - \alpha^2 \\
&= \frac{(1-\alpha)\mathrm{Var}_\theta[\,T_n(\mathbf{X})\,] + \alpha\mathrm{Var}_{\theta'}[\,T_n(\mathbf{X})\,]}{\{g(\theta') - g(\theta)\}^2} + \alpha\,(1-\alpha)
\end{aligned}$$

と表されることから, これを (2.4) に代入して整理すれば, 求める不等式 (2.3) を得る. ∎

系 2.1 不等式 (2.3) において, 局所的に等号が成立するための必要十分条件は, θ, $\alpha\,(0 < \alpha < 1)$, $\delta\ (0 < \delta < \mu(A_\theta))$ を固定したとき, $g(\theta)$ の不偏推定量 $T_{1,n}$ が $\mathbf{x} \in A_\theta \cup A_{\theta'}$ において

$$T_{1,n}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta') - g(\theta)\}}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} \cdot \frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')} + \{(1-\alpha)\,g(\theta) + \alpha\,g(\theta')\} \tag{2.5}$$

すなわち

$$T_{1,n}(\mathbf{x}) = \begin{cases}
g(\theta) - \alpha\,\{g(\theta') - g(\theta)\}\left\{\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} - 1\right\} & (\mathbf{x} \in A_\theta \cap A_{\theta'}^c), \\
(2.5)\ \text{の右辺} & (\mathbf{x} \in A_\theta \cap A_{\theta'}), \\
g(\theta') + (1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}\left\{\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} - 1\right\} & (\mathbf{x} \in A_\theta^c \cap A_{\theta'})
\end{cases}$$

の形に表されることである.

(証明) (2.4) において, θ, α, δ を固定して $\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') \cdot \mathrm{Var}_\alpha[\,\hat{\alpha}(\mathbf{X})\,] = 1$ を満たすようにすればよい. 実際 $h(\mathbf{x})$, $k(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})$ をそれぞれ $\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\}/p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')$, $\hat{\alpha}(\mathbf{x}) - \alpha$, $p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')$ とおくと補題 2.1 より

$$\alpha(\mathbf{x}) - \alpha = \frac{1}{\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} \cdot \frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')}$$

すなわち

$$\frac{T_{1,n}(\mathbf{x}) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} - \alpha = \frac{\alpha\,(1-\alpha)}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} \cdot \frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')}$$

となり, 整理すれば式 (2.5) を得る. ∎

系 2.2 定理 2.1 において, 局所的に等号が成立するための必要十分条件は, θ, α, δ を固定したときに $\mathbf{x} \in A_\theta \cup A_{\theta'}$ において

$$\begin{aligned}\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} - 1 = \alpha\Biggl\{&\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} - 1\right)\int_{A_\theta \cap A_{\theta'}^c} p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)d\mu(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{A_\theta \cap A_{\theta'}}\left(\frac{1-\alpha}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}\cdot\frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')} + 1\right)^2 p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)d\mu(\mathbf{x})\Biggr\} \\ &+ (1-\alpha)\Biggl\{\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')} - 1\right)^2\int_{A_\theta^c \cap A_{\theta'}} p^{(n)}(\mathbf{x}:\theta')d\mu(\mathbf{x}) \\ &+ \int_{A_\theta \cap A_{\theta'}}\left(\frac{\alpha}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}\cdot\frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')} - 1\right)^2 p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')d\mu(\mathbf{x})\Biggr\} \qquad (2.6)\end{aligned}$$

となることである.

(証明) 系 2.1 で求めた推定量 $T_{1,n}$ を Vincze の不等式の左辺に代入すると,

$$(1-\alpha)\mathrm{Var}_\theta[\,T_{1,n}(\mathbf{X})\,] + \alpha\mathrm{Var}_{\theta'}[\,T_{1,n}(\mathbf{X})\,] = \alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\,\{\,\text{式 (2.6) の右辺}\,\}$$

となることから, 直ちに示される. ∎

2.2 応用例

例 2.1 まず $\mathbf{X} = (\,X_1, \ldots, X_n\,)$ を一様分布 $U(\theta,\, \theta+1)$ からの大きさ n の無作為標本とする. このとき, $y_1 = x_1$, $y_j = x_j - x_1$ $(j = 2, \ldots, n)$ と変数変換を行うと, $g(\theta)$ の推定量 T_n の不偏性より

$$\begin{aligned}E_\theta[\,T_n(\mathbf{X})\,] &= \int_\theta^{\theta+1}\cdots\int_\theta^{\theta+1} T_n(x_1, \ldots, x_n)\prod_{i=1}^n dx_i \\ &= \int_\theta^{\theta+1} dy_1 \int_B T_n(y_1,\, y_1+y_2, \ldots, y_1+y_n)\prod_{j=2}^n dy_j \\ &= g(\theta) \qquad ({}^\forall\theta \in \Omega)\end{aligned}$$

と表される. 但し, B は $(x_1, \ldots, x_n) \in [\,\theta,\, \theta+1)^n$ のときの $(y_2, \ldots, y_n)$ のとりうる範囲で θ によらない. この辺々を θ で微分して変数を x で置き換えると

$$\begin{aligned}g'(x) &= \int_B T_n(x+1, x+1+y_2, \ldots, x+1+y_n)\prod_{j=2}^n dy_j \\ &\quad - \int_B T_n(x, x+y_2, \ldots, x+y_n)\prod_{j=2}^n dy_j \qquad (2.7)\end{aligned}$$

となる．一方，系 2.1 より局所的に等号が成立するための条件を求めると，$I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') = 1-(1-\delta)^n$ $(0<\delta<1)$ より，$\theta=\theta_0$ と固定したとき

$$T_{1,n}(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\theta_0)-\alpha\{g(\theta_0')-g(\theta_0)\}\left\{\frac{1}{1-(1-\delta)^n}-1\right\} & (\mathbf{x}\in A_{\theta_0}\cap A_{\theta_0'}^c), \\ (1-\alpha)\,g(\theta_0)+\alpha\,g(\theta_0') & (\mathbf{x}\in A_{\theta_0}\cap A_{\theta_0'}), \\ g(\theta_0)-\alpha\{g(\theta_0')-g(\theta_0)\}\left\{\frac{1}{1-(1-\delta)^n}-1\right\}+\frac{g(\theta_0')-g(\theta_0)}{1-(1-\delta)^n} & (\mathbf{x}\in A_{\theta_0}^c\cap A_{\theta_0'}) \end{cases} \tag{2.8}$$

となる．これを (2.7) に代入すると B の確率が 1 であることから，$\theta_0\le x<\theta_0+\delta$ のとき

$$g'(x)=\frac{g(\theta_0')-g(\theta_0)}{1-(1-\delta)^n} \tag{2.9}$$

となる．ここで微分方程式 (2.9) の右辺は x に依存しないので，これを c(定数) とおいて解くと

$$g(x)=cx+d \qquad (c\ne 0,\ c \text{ と } d \text{ は定数}) \tag{2.10}$$

となる．逆に (2.10) が (2.9) の解である条件を求めると

$$c(1-\delta)\left\{1-(1-\delta)^{n-1}\right\}=0 \quad (c\ne 0,\ 0<\delta<1)$$

となることから，$n=1$ でなければならないことが分かる．さらに，(2.8) で求めた推定量 $T_{1,n}$ が $g(\theta_0)=c\theta_0+d$ の不偏推定量となっていることから，これは局所的のみならず任意の θ について成り立つ．

以上のことから，例 2.1 において Vincze の不等式の等号が成立するのは標本の大きさが 1 のときに限る．このとき，任意に固定した θ に対して

$$T_1(x)=\begin{cases} c\{\theta-\alpha(1-\delta)\} & (\theta\le x<\theta+\delta) \\ c\{\theta+\alpha\delta\} & (\theta+\delta\le x<\theta+1) \\ c\{\theta+1-\alpha(1-\delta)\} & (\theta+1\le x<\theta+1+\delta) \end{cases}$$

は $g(\theta)=c\theta+d\,(c,d$ は定数$)$ の不偏推定量であり，Vincze の不等式の両辺は $c^2\alpha(1-\alpha)\delta(1-\delta)$ となり一致する．

例 2.2 密度関数 $p(x|\theta)=p(x-\theta)$ が

$$p(x)=\begin{cases} p & (0\le x<1) \\ q & (1\le x<2) \\ 0 & (x<0,\ x\ge 2) \end{cases}$$

を持つ分布からの標本を X とする．但し，$0<p<q$, $p+q=1$ とする．尚，この分布からの標本に基づく局所最小不偏分散推定量の構成については [AT95] において論じられて

いる. まず, 不偏性の条件により

$$\begin{aligned} E_\theta[T(X)] &= \int_\theta^{\theta+2} T(x)p(x-\theta)dx \\ &= p\int_\theta^{\theta+1} T(x)dx + q\int_{\theta+1}^{\theta+2} T(x)dx \\ &= g(\theta) \qquad ({}^\forall\theta\in\Omega) \end{aligned}$$

であり, この辺々を θ で微分すると,

$$g'(x) = q\,T(x+2) - (q-p)\,T(x+1) - p\,T(x) \tag{2.11}$$

となる. 尚, この例では $0<\delta:=\theta'-\theta<2$ となることに注意.

(i) $0<\delta\le 1$ のとき

$$\frac{p(x|\theta')-p(x|\theta)}{p_\alpha(x:\theta,\theta')} = \begin{cases} \dfrac{p-q}{(1-\alpha)\,q+\alpha\,p} & (\theta+1\le x<\theta'+1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となるから, $\theta=\theta_0$ と固定したとき $g(\theta)$ の不偏推定量 T_1 は, 系 2.1 により

$$T_1(x) = \begin{cases} g(\theta_0) - \alpha\,\{g(\theta_0')-g(\theta_0)\}\left\{\frac{1}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')}-1\right\} & (\theta_0\le x<\theta_0'), \\ (1-\alpha)\,g(\theta_0)+\alpha\,g(\theta_0') & (\theta_0'\le x<\theta_0+1), \\ g(\theta_0) - \alpha\,\{g(\theta_0')-g(\theta_0)\}\left\{1-\frac{(1-\alpha)(q-p)}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')}\right\} & (\theta_0+1\le x<\theta_0'+1), \\ (1-\alpha)\,g(\theta_0)+\alpha\,g(\theta_0') & (\theta_0'+1\le x<\theta_0+2), \\ g(\theta_0') - (1-\alpha)\,\{g(\theta_0')-g(\theta_0)\}\left\{\frac{1}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')}-1\right\} & (\theta_0+2\le x<\theta_0'+2) \end{cases}$$

となる. 但し, $\theta_0'=\theta_0+\delta$ とする. ここで, $I_\alpha^{(1)}(\theta,\theta')=\{(1-\alpha)q+\alpha p-pq\}\,\delta$ となり, この値は θ によらない. 上の $T_1(x)$ を (2.11) に代入して整理すると

$$g'(x) = \frac{g(\theta_0+\delta)-g(\theta_0)}{\delta} \tag{2.12}$$

となり, (2.12) の右辺 $=c$(定数) とおいて解くと

$$g(x) = c\,x+d \qquad (c\neq 0,\ c \text{ と } d \text{ は定数}) \tag{2.13}$$

となる. 逆に, 解 (2.13) は (2.12) を満たし,

$$E_{\theta_0}[\,T_1(X)\,] = g(\theta_0)$$

となることから, この不偏性は任意の θ について成立することが分かる.

(ii) $1 < \delta < 2$ のとき

$$\frac{p(x|\theta') - p(x|\theta)}{p_\alpha(x:\theta,\theta')} = \begin{cases} \dfrac{p-q}{(1-\alpha)\,q + \alpha\, p} & (\theta' \le x < \theta + 2), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

となるから, $\theta = \theta_0$ と固定したとき $g(\theta)$ の不偏推定量 T_1 は, 系 2.1 により

$$T_1(x) = \begin{cases} g(\theta_0) - \alpha \{g(\theta_0') - g(\theta_0)\} \left\{ \frac{1}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')} - 1 \right\} & (\theta_0 \le x < \theta_0'), \\ g(\theta_0) - \alpha \{g(\theta_0') - g(\theta_0)\} \left\{ 1 - \frac{(1-\alpha)(q-p)}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')} \right\} & (\theta_0' \le x < \theta_0 + 2), \\ g(\theta_0') - (1-\alpha) \{g(\theta_0') - g(\theta_0)\} \left\{ \frac{1}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')} - 1 \right\} & (\theta_0 + 2 \le x < \theta_0' + 2) \end{cases} \tag{2.14}$$

となる. 但し, $\theta_0' = \theta_0 + \delta$ とする. また $I_\alpha^{(1)}(\theta,\theta') = \{(1-\alpha)\,q + \alpha\, p - p\, q\}\,\delta$ になる. この $T_1(x)$ を (2.11) に代入して整理した方程式

$$g'(x) = \frac{g(\theta_0 + \delta) - g(\theta_0)}{\delta} \tag{2.15}$$

を解くと, (i) と同様にして

$$g(x) = cx + d \qquad (c \neq 0,\ c, d \text{ は定数}) \tag{2.16}$$

となる. 逆に, 解 (2.16) は (2.15) を満たす. さらに

$$E_{\theta_0}[\,T_1(X) - p(\theta_0)\,] = \alpha\, c\,(\delta - 1)\frac{(1-\alpha)\,q + \alpha\, p - 2\,p\,q}{(1-\alpha)\,q + \alpha\, p - \,p\,q}$$

となることから, $T_1(X)$ が $g(\theta_0)$ の不偏推定量であるための条件は

$$(1-\alpha)\,q + \alpha\, p - 2\,p\,q = 0 \quad \text{より} \quad \alpha = q = 1 - p$$

となる.

(i), (ii) より, $g(\theta) = c\theta + d\,(c \neq 0,\ c, d$ は定数) とおくと, $0 < \delta \le 1$ または $\alpha = q = 1-p$ のとき, 固定された $\theta = \theta_0$ に対して

$$\begin{aligned} T_1(X) = &\{(1-\alpha)\, g(\theta_0) + \alpha\, g(\theta_0')\} \\ &+ \frac{\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta_0') - g(\theta_0)\}}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0,\theta_0')} \frac{p(x-\theta_0') - p(x-\theta_0)}{(1-\alpha)\, p(x-\theta_0) + \alpha\, p(x-\theta_0')} \end{aligned}$$

は $g(\theta)$ の不偏推定量である. そして, Vincze の不等式において左辺と右辺の値は等しくなり, その値は

$$\alpha\,(1-\alpha)\,c^2\,\delta\,\frac{\{(1-\alpha)\,q + \alpha\, p\}(1-\delta) + p\,q\,\delta}{(1-\alpha)\,q + \alpha\, p - p\,q}$$

となる.

注意 2.1 例 2.2 では, 適当な推定量を用いることによっても Vincze の不等式の下界を達成するように出来る. まず, $g(\theta)=\theta$ として

$$T(X)=[\,X\,]-q \qquad ([\ \ ]\text{ は Gauss 記号})$$

とおくと

$$\begin{aligned} E_\theta[\,T(X)\,] &= \theta \qquad (^\forall\theta\in\Omega) \\ Var_\theta[\,T(X)\,] &= p\,q+(\theta-[\,\theta\,])\,(1-\theta+[\,\theta\,]) \end{aligned}$$

となる. ここで, $\theta=\theta_0\,(\theta_0\in\mathbf{Z})$ を一つ固定すると, $Var_{\theta_0}[\,T(X)\,]=p\,q$ となり, さらに $\alpha=q=1-p,\ \delta=1$ とおくと Vincze の不等式で (左辺) $=p\,q=$ (右辺) となる.

例 2.3 密度関数 $p(x|\theta)=p(x-\theta)$ が

$$p(x)=\begin{cases} ce^{-x} & (0\le x<1) \\ 0 & (x<0,\ x\ge 1) \end{cases}$$

をもつ分布からの標本を X とする. 但し, $c=e/(e-1)$ とする. ここでは, 例 2.2 と全く同様の方法を用いる. θ を固定して $g(\theta)=c\,e^{\theta}+d\,(c\neq 0,\ c,d$ は定数) について, その推定量

$$\begin{aligned} T_1(x)=&\{(1-\alpha)\,g(\theta)+\alpha\,g(\theta')\} \\ &+\frac{\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta')-g(\theta)\}}{I_\alpha(\theta,\theta')}\cdot\frac{p(x-\theta')-p(x-\theta)}{(1-\alpha)\,p(x-\theta)+\alpha\,p(c-\theta')} \end{aligned}$$

を考えると, T_1 は $g(\theta)$ の不偏推定量になる. 但し,

$$I_\alpha^{(1)}(\theta,\theta')=\frac{(e^\delta-1)\,\{\,\alpha(e-1)+1\,\}}{(e-1)\,\{\,\alpha(e^\delta-1)+1\,\}}$$

である. このとき Vincze の不等式における両辺は一致して, その値は

$$\alpha\,(1-\alpha)\,c^2\,e^{-2\theta}\,\frac{(e-e^\delta)(e^\delta-1)}{\alpha(e-1)+1}$$

となる.

注意 2.2 上記の例 2.3 では, 系 2.1 における推定量をとれば不偏性の条件から, 本来は統計家が定めるべき推定目標 $g(\theta)$ の関数形が決定されてしまう. また, (例2.1 より) 任意の標本分布に対して, 標本の次元が 2 以上の場合には下界を達成することが難しいと予想される.

2.3 局所最小分散不偏推定量による Vincze の不等式

まず, X を密度関数 $p(x|\theta) = p(x-\theta)$ からの標本として, $g(\theta) = \theta$ の推定を考える. そして, 密度に関して

$$\begin{cases} p(x) > 0 & (a \le x < b), \\ p(x) = 0 & (x < a,\ x \ge b) \end{cases}$$

を仮定する. 但し, $-\infty < a,\, b, < \infty$ とする. $p(x)$ は区間 (a, b) で連続微分可能であるとし, 極限値 $c_0 = \lim_{x\to a+0} p(x)$, $d_0 = \lim_{x\to b-0} p(x)$ の存在も仮定する. 但し, $-\infty < c_0,\, d_0 < \infty$ とする. また, $0 < \delta := \theta' - \theta < b - a$ となることに注意が必要である. このとき, $\theta = \theta_0$ を固定した上で

$$T(x) = \theta_0 \qquad (\theta_0 + a \le x < \theta_0 + b)$$

とおく. 次に, $\theta_0 + b \le x < \theta_0 + 2b - a$ における $T(x)$ の値を, 不偏性の条件 $E_\theta[T(X)] = \theta$ を満たすように定める. このとき

$$\mathrm{Var}_{\theta_0}[T(X)] = \int_{\theta_0+a}^{\theta_0+b} \{T(X) - \theta_0\}^2 p(x-\theta) d\mu(x) = 0$$

となり, これを Vincze の不等式に代入して

$$\alpha\, \mathrm{Var}_{\theta_0'}[T(X)] \ge \alpha\,(1-\alpha)\,\delta^2 \left\{ \frac{1}{I_\alpha^{(1)}(\theta_0, \theta_0')} - 1 \right\}$$

を得る. 両辺 α で割り $\alpha \searrow 0$ とし, 情報量 $I_\alpha^{(1)}(\theta, \theta')$ が位置母数 θ に依存しないことに注意して $\theta = 0$ とおくと

$$\mathrm{Var}_\delta[T(X)] \ge \delta^2 \left\{ \frac{1}{I_\alpha^{(1)}(0, \delta)} - 1 \right\} \tag{2.17}$$

と出来る. ここでは, 不等式 (2.17) において等号を満たすような例を考える.

例 2.4 例 2.1 において $n = 1$, $g(\theta) = \theta$ とする. $\theta = 0$ と固定すると, 不偏性の条件

$$E_\theta[T(X)] = \int_\theta^{\theta+1} T(x) dx = \theta$$

から, その辺々を θ で微分して $T(x+1) - T(x) = 1$ を得る. また, 初期条件 $T(x) = 0\ (0 \le x < 1)$ より, 漸化的に

$$T(x) = n \qquad (n \le x < n+1,\ n \in \mathbf{N})$$

となり, この T に対して

$$E_\theta[T(X)] = \theta, \qquad \mathrm{Var}_0[T(X)] = 0$$

となる. そして, 不等式 (2.17) において

$$\mathrm{Var}_\delta[T(X)] = \delta\,(1-\delta) = \delta \left\{ \frac{1}{I_\alpha^{(1)}(0, \delta)} - 1 \right\}$$

となり, 両辺が一致する.

注意 2.3 例 2.4 では, θ の不偏推定量 $T(X) = [X]$ ($[X]$ は Gauss 記号) を用いることによっても, 不等式 (2.17) の等号が成立する ([PV85]).

例 2.5 例 2.2 において $\theta = 0$ と固定する. $g(\theta) = \theta$ の場合にその不偏性の条件により

$$E_\theta[T(X)] = \int_\theta^{\theta+1} T(x)p(x)dx = \theta$$

を得る. この辺々を θ について微分すると $T(x+2) - (q-p)T(x+1) - pT(x) = 1$ となり, これと初期条件 $T(x) = 0$ $(0 \le x < 2)$ より,

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q} & (2 \le x < 3), \\ \dfrac{1}{q}\left(2 - \dfrac{p}{q}\right) & (3 \le x < 4), \\ \cdots & \end{cases}$$

と漸化的に求められる. ここで,

$$E_\theta[T(X)] = \theta, \qquad \mathrm{Var}_0[T(X)] = 0$$

より, $0 < \delta \le 1$ とすると, 不等式 (2.17) において

$$\mathrm{Var}_\delta[T(X)] = \frac{\delta(1 - q\delta)}{q} = \delta\left\{\frac{1}{I_\alpha^{(1)}(0,\delta)} - 1\right\}$$

となり, 等号が成立する. 尚, $1 < \delta < 2$ のときにはこの不等式の等号は成立しない.

3 Vinczeの不等式のMSEへの拡張

この節では, Vincze の不等式を平均二乗誤差 (MSE) の場合に拡張し, この不等式においては任意の標本分布, 推定目標 (未知母数の関数) に対して局所的に等号が成立することを示す.

まず, 損失関数 L, 危険関数 R, 偏り b を次のように定義する.

$$\begin{aligned} L(\theta, d) &= \{d - g(\theta)\}^2, \\ R(\theta, T_n) &= E_\theta[L(\theta, T_n(\mathbf{X}))] = E_\theta[\{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)\}^2], \\ b(\theta) &= E_\theta[T_n(\mathbf{X})] - g(\theta) \end{aligned}$$

補題 3.1 $g(\theta)$ の任意の推定量 T_n に対して

$$\begin{aligned}
(1-\alpha)\,R(\theta,T_n)+\alpha\,R(\theta',T_n) &\geq \alpha\,(1-\alpha)\Bigg[\{g(\theta')-g(\theta)\}^2\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}-1\right)\\
&\quad +2\,\{g(\theta')-g(\theta)\}\,\{b(\theta')-b(\theta)\}\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}-1\right)+\{b(\theta')-b(\theta)\}^2\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}\Bigg]\\
&= \alpha\,(1-\alpha)\Bigg[\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}\left[\{b(\theta')-b(\theta)\}+\{g(\theta')-g(\theta)\}\,\{1-I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\}\right]^2\\
&\quad +\{g(\theta')-g(\theta)\}^2\,\{1-I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\}\Bigg] \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

が成立する. ここで, θ, α, δ を固定して

$$\begin{aligned}
T_{0,n}(\mathbf{x}) &= \frac{\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta')-g(\theta)+b(\theta')-b(\theta)\}}{I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')}\cdot\frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')-p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')}\\
&\quad +\{(1-\alpha)\,g(\theta)+\alpha\,g(\theta')\} \qquad (3.2)
\end{aligned}$$

とおくと, この不等式において局所的に等号が成立する.

(証明) まず

$$\hat{\alpha}(\mathbf{X})=\frac{T_n(\mathbf{X})-g(\theta)}{g(\theta')-g(\theta)}$$

とおくと, 条件

$$E_\theta[\,T_n(\mathbf{X})\,]=g(\theta)+b(\theta)\quad ({}^\forall\theta\in\Omega)$$

より

$$\begin{aligned}
E_\alpha[\,\hat{\alpha}(\mathbf{X})\,] &= \int_{A_\theta\cup A_{\theta'}}\hat{\alpha}(\mathbf{x})\,p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')\,d\mu(\mathbf{x})\\
&= \frac{(1-\alpha)\,b(\theta)+\alpha\,b(\theta')}{g(\theta')-g(\theta)}\qquad (0<^\forall\alpha<1)
\end{aligned}$$

が得られる. また, 補題 2.1 で $h(\mathbf{x})$, $k(\mathbf{x})$, $f(\mathbf{x})$ をそれぞれ $\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')-p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\}/p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')$, $\hat{\alpha}(\mathbf{x})-\alpha$, $p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')$ とおくと

$$\begin{aligned}
E\,[\,h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})\,] &= \int_{A_\theta\cup A_{\theta'}}\{\hat{\alpha}(\mathbf{x})-\alpha\}\left\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')-p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\right\}d\mu(\mathbf{x})\\
&= 1+\frac{b(\theta')-b(\theta)}{g(\theta')-g(\theta)}
\end{aligned}$$

となり, Cauchy-Schwarz の不等式により

$$\begin{aligned}
&\left\{1+\frac{b(\theta')-b(\theta)}{g(\theta')-g(\theta)}\right\}^2=\{[\,h(\mathbf{X})k(\mathbf{X})\,]\}^2\leq E\left[\{h(\mathbf{X})\}^2\right]E\left[\{k(\mathbf{X})\}^2\right]\\
&=\int_{A_\theta\cup A_{\theta'}}\frac{\{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')-p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\}^2}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')}d\mu(\mathbf{x})\int_{A_\theta\cup A_{\theta'}}(\hat{\alpha}(\mathbf{x})-\alpha)^2p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')d\mu(\mathbf{x})\\
&=\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\cdot E_\alpha\left[\{\hat{\alpha}(\mathbf{X})-\alpha\}^2\right]
\end{aligned}$$

すなわち

$$\{g(\theta') - g(\theta)\}^2 E_\alpha\left[\{\hat{\alpha}(\mathbf{X}) - \alpha\}^2\right] \geq \frac{\alpha(1-\alpha)}{I_\alpha^{(n)}(\theta', \theta)}\Big[\{g(\theta') - g(\theta)\} + \{b(\theta') - b(\theta)\}\Big] \tag{3.3}$$

を得る. 一方,

$$\begin{aligned}
&\{g(\theta') - g(\theta)\}^2 E_\alpha\left[\{\hat{\alpha}(\mathbf{X}) - \alpha\}^2\right] \\
&= E_\alpha\Big[\{(g(\theta') - g(\theta))(\hat{\alpha}(\mathbf{X}) - \alpha)\}^2\Big] \\
&= E_\alpha\left[\{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)\}^2\right] + \alpha^2\{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)\}^2 - 2\alpha\{g(\theta') - g(\theta)\}E_\alpha[T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)] \\
&= (1-\alpha)E_\theta\left[\{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta)\}^2\right] + \alpha E_{\theta'}\left[\{T_n(\mathbf{X}) - g(\theta')\}^2\right] \\
&\quad + 2\alpha(1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}\{b(\theta') - b(\theta)\} + \alpha(1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}^2
\end{aligned}$$

と表されることから, これを (3.3) に代入して整理すれば求める補題 3.1 の不等式を得る. また, この不等式において局所的に等号が成立するための必要十分条件は, (固定された θ, α, δ に対して) 式 (3.3) の等号が成立することである. これは, 補題 2.1 より,

$$\alpha(\mathbf{x}) - \alpha = \frac{1}{\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')} \cdot \frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')}\left\{1 + \frac{b(\theta') - b(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)}\right\}$$

すなわち

$$\frac{T_{0,n}(\mathbf{x}) - g(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)} - \alpha = \frac{\alpha(1-\alpha)}{I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')} \cdot \frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x} : \theta, \theta')}\left\{1 + \frac{b(\theta') - b(\theta)}{g(\theta') - g(\theta)}\right\}$$

と求められ, 整理すれば式 (3.2) を得る. ∎

定理 3.1 (Vincze の不等式の MSE への拡張) $g(\theta)$ の任意の推定量 T_n に対して

$$(1-\alpha)R(\theta, T_n) + \alpha R(\theta', T_n) \geq \alpha(1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\left\{1 - I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')\right\} \tag{3.4}$$

が成り立つ.

(証明) 補題 3.1 の右辺の最小値を求めればよい. これは, (3.1) の最終項の形より

$$b(\theta') - b(\theta) = -\{g(\theta') - g(\theta)\}\{1 - I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')\} \tag{3.5}$$

で達成し, 最小値が

$$\alpha(1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\left\{1 - I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')\right\}$$

となることは明らかである. ∎

系 3.1 定理 3.1 において, 局所的に等号が成立するための必要十分条件は, θ, α, δ を固定したとき, $g(\theta)$ の推定量 T_n^* が $\mathbf{x} \in A_\theta \cup A_{\theta'}$ において

$$T_n^*(\mathbf{x}) = \alpha(1-\alpha)\{g(\theta') - g(\theta)\}\frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta')} + \{(1-\alpha)\,g(\theta) + \alpha\, g(\theta')\} \tag{3.6}$$

すなわち

$$T_n^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\theta) & (\mathbf{x} \in A_\theta \cap A_{\theta'}^c), \\ (3.6)\text{ の右辺} & (\mathbf{x} \in A_\theta \cap A_{\theta'}), \\ g(\theta') & (\mathbf{x} \in A_\theta^c \cap A_{\theta'}) \end{cases}$$

の形に表されることである.

(証明) 定理 3.1 より, 条件

$$b(\theta') - b(\theta) = -\{g(\theta') - g(\theta)\}\{1 - I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\}$$

を補題 3.1 で求められた推定量 $T_{0,n}$ に代入すると, θ, α, δ を固定したとき $\mathbf{x} \in A_\theta \cup A_{\theta'}$ において推定量 T_n^* を得る. このとき, (3.1) の最終項の形より, 固定された θ と下界を達成すべき推定量の偏り b に対して

$$b(\theta') - b(\theta) = -\{g(\theta') - g(\theta)\}\left\{1 - I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\right\}$$

を満たすことが, 系 3.1 が成り立つための必要十分条件になっている. しかし, 上で求めた T_n^* に対して

$$b^*(\theta) = E_\theta[\,T_n^*(\mathbf{X})\,] - g(\theta)$$

とおくと

$$b^*(\theta') - b^*(\theta) = -\{g(\theta') - g(\theta)\}\left\{1 - I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\right\}$$

となり常に (この必要十分条件を) 満たしているので, ここではチェックを要しないことが分かる. よって, 以上により系 3.1 が示されたことになる. ∎

注意 3.1 拡張された Vincze の不等式においては, 任意の標本分布, 推定目標に対して局所的に等号が成立するような推定量が常に存在する. しかし, Vincze の不等式において等号が成立する場合では, その下界は (拡張された Vincze の不等式の下界より) 大きくなる. 実際,

$$0 < \frac{(3.4)\text{ の下界}}{(2.3)\text{ の下界}} = I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') < 1 \tag{3.7}$$

より $\{(3.4)$ の下界$\} < \{(2.3)$ の下界$\}$ となっている.

例 3.1 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ を一様分布 $U(\theta, \theta+1)$ からの大きさ n の無作為標本とする．この例では

$$I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta') = I_\alpha^{(n)}(0, \delta) = 1 - (1-\delta)^n$$

より，θ, α, δ を固定したとき，系 3.1 での推定量

$$T_n^*(\mathbf{x}) = \begin{cases} g(\theta) & (\mathbf{x} \in A_\theta \cap A_{\theta'}^c), \\ (1-\alpha)\, g(\theta) + \alpha\, g(\theta') & (\mathbf{x} \in A_\theta \cap A_{\theta'}), \\ g(\theta') & (\mathbf{x} \in A_\theta^c \cap A_{\theta'}) \end{cases}$$

に対して拡張された Vincze の不等式の両辺は一致し，その値は

$$\alpha\,(1-\alpha)\,(1-\delta)^n\ \{g(\theta') - g(\theta)\}^2$$

となる．

例 3.2 $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ を密度関数 $p(x-\theta)$ が下の形で与えられる切断指数分布 $TE(\theta, \theta+1)$ からの大きさ n の無作為標本とする．

$$p(x) = \begin{cases} ce^{-x} & (0 \le x < 1), \\ 0 & (x < 0,\ x \ge 1) \end{cases}$$

但し，$c = e/(e-1)$ とする．この例では帰納法により

$$I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta') = I_\alpha^{(n)}(0, \delta) = 1 - \frac{1}{\alpha\,(e^{n\delta}-1)} \left(\frac{e - e^\delta}{e-1} \right)^n$$

となることが示されるので，θ, α, δ を固定したとき，系 3.1 での推定量 T_n^* に対して定理 3.1 の両辺は一致し，その値は

$$\alpha\,(1-\alpha)\ \{g(\theta') - g(\theta)\}^2\ \frac{1}{\alpha\,(e^{n\delta}-1)} \left(\frac{e - e^\delta}{e-1} \right)^n$$

となる．

例 3.1, 例 3.2 においては情報量 $I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')$ の値が解析的に求められたが，実際には解析的に求められない場合も多い．ここで $I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')$ は n 変数の重積分で表されることから，情報量の値が具体的に求められない場合には，n を固定すれば数値計算を行えることもある．しかし，そうでないときのために，Vincze 自身による情報量 $I_\alpha^{(n)}(\theta, \theta')$ の不等式による評価を証明なしでいくつか紹介し ([V92])，それらを用いて定理 3.1 の不等式に対して次の (1),(2) のような変形を考える．

(1)

$$\begin{aligned} E_1 &= \{\mathbf{x} | p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') > p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\} \cap (A_\theta \cap A_{\theta'}) \\ E_2 &= \{\mathbf{x} | p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') < p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\} \cap (A_\theta \cap A_{\theta'}) \\ E_3 &= \{\mathbf{x} | p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') = p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\} \cap (A_\theta \cap A_{\theta'}) \end{aligned}$$

とおくと

$$I_\alpha^{(n)}(\theta,\,\theta') \le 1 - P_\theta(E_1) - P_{\theta'}(E_2) - P_\theta(E_3)$$

となる ([V92]). 但し, $P_\theta(E) = \int_E p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)d\mu(\mathbf{x})$ とし, また $E_1 \cup E_2 \cup E_3 = A_\theta \cap A_{\theta'}$ となることに注意が必要である. これより, (3.4) は

$$(1-\alpha)\,R(\theta,T_n) + \alpha\,R(\theta',T_n) \ge \alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\,\{P_\theta(E_1) + P_{\theta'}(E_2) + P_\theta(E_3)\} \tag{3.8}$$

となる.

例 3.3 $\mathbf{X} = (\,X_1,\ldots,X_n\,)$ を密度関数 $p(x-\theta)$ が下の形で与えられる三角形分布からの大きさ n の無作為標本とする.

$$p(x) = \begin{cases} 2(1-x) & (0 \le x < 1) \\ 0 & (x < 0,\ x \ge 1) \end{cases}$$

このとき, $P_\theta(E_1) = (1-\delta)^{2n}$, $P_{\theta'}(E_2) = P_\theta(E_3) = 0$ より

$$(1-\alpha)\,R(\theta,T_n) + \alpha\,R(\theta',T_n) \ge \alpha\,(1-\alpha)(1-\delta)^{2n}\,\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\ (>0)$$

となる.

(2)

$$D_n = \int_{A_\theta \cup A_{\theta'}} |p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta') - p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)|d\mu(\mathbf{x})$$

とおくと

$$I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta') \le \max\{\alpha,\,(1-\alpha)\}\,D_n$$

となり ([V92]), これより (3.4) は

$$(1-\alpha)\,R(\theta,T_n) + \alpha\,R(\theta',T_n) \ge \alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\,[1 - \max\{\alpha,\,(1-\alpha)\}\,D_n] \tag{3.9}$$

になる.

例 3.4 密度関数 $p(x|\theta)$ が

$$p(x|\theta) = \begin{cases} p & (0 \le x \le \theta,\ \theta+1 \le x \le 2) \\ q & (\theta < x < \theta+1) \\ 0 & (x < 0,\ x \ge 2) \end{cases}$$

を持つ分布からの大きさ n の無作為標本を $\mathbf{X} = (\,X_1,\ldots,X_n\,)$ とする. 但し, $0 < p < q$, $p + q = 1$, $0 < \theta < 1$ とする. ここで (2) において

$$\begin{cases} D_1 = 2\,(q-p)\,\delta \\ D_n \le \{1 - (q-p)\delta\}\,D_{n-1} + D_1 \quad (n = 2,\,3,\ldots) \end{cases}$$

となることから

$$D_n \leq 2\left[1-\{1-(q-p)\,\delta\}^n\right] \quad ({}^\forall n \in \mathbf{N})$$

となり, これを用いると

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\,R(\theta,T_n)+\alpha\,R(\theta',T_n)\\ \geq\ &\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta')-g(\theta)\}^2\left[1-2\,\max\{\alpha,\,(1-\alpha)\}\,\{1-(1-(q-p)\,\delta)^n\}\right]\end{aligned}$$

となる.

(2) において, 不等式 (3.9) の右辺は$\alpha=1/2$ で最大となり, α が 1/2 の近傍では比較的大きな値をとる. しかし, α が 0 あるいは 1 の近傍では負になってしまうこともあり, そのような場合には良い評価にはなっていない. 次に, この (2) で 2.3 節の条件と任意の $\theta\in\Omega$ に対して $x\in A_\theta\cap A_{\theta'}$ ならば $p(x|\theta')>p(x|\theta)$ であることを仮定する. 但し, 標本の大きさ (次元) は一般の n で考え, 推定目標 $g(\theta)$ の関数形も任意とする. このとき

$$D_n=2\left[1-\left\{\int_{a+\delta}^{b}p(x)dx\right\}^n\right]=\left[1-\left\{1-\int_{a}^{a+\delta}p(x)dx\right\}^n\right]$$

となるから, (3.9) は

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)\,R(\theta,T_n)+\alpha\,R(\theta',T_n)\\ \geq\ &\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta')-g(\theta)\}^2\left[1-2\,\max\{\alpha,\,(1-\alpha)\}\left\{1-\left(1-\int_{a}^{a+\delta}p(x)dx\right)^n\right\}\right]\end{aligned}$$

になる.

4 Bayes危険に関するVinczeの不等式

この節では, Bayes危険を用いたVinczeの不等式 ([V79]) を述べ, 不偏性の条件がこの不等式に対して大きな制限を与えていることを示す.

まず, $\Theta\in\Omega\subset\mathbf{R}$ をある σ–有限測度 ν に対する密度λ (または λ') を持つ分布Λ (または Λ') に従う確率変数とし, この事前分布に関する台, θ の情報量等を次のように定義する.

$$\begin{aligned}q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda) &= \int_\Omega p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\lambda(\theta)d\nu(\theta) \quad \left(q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')=\int_\Omega p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\lambda'(\theta)d\nu(\theta)\right),\\ q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\theta,\theta') &= (1-\alpha)\,q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)+\alpha\,q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda') \qquad (0<\alpha<1),\\ g_\lambda &= \int_\Omega g(\theta)\lambda(\theta)d\nu(\theta) \quad \left(g_{\lambda'}=\int_\Omega g(\theta)\lambda'(\theta)d\nu(\theta)\right),\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
A_\lambda &= \{\mathbf{x}\,|\,q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda) > 0\} \quad \left(A_{\lambda'} = \{\mathbf{x}\,|\,q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda') > 0\}\right), \\
\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda') &= \int_{A_\lambda \cup A_{\lambda'}} \frac{\{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda') - q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)\}^2}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')} d\mu(\mathbf{x}), \\
I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda') &= \alpha\,(1-\alpha)\,\mathcal{I}_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda') = 1 - \int_{A_\lambda \cap A_{\lambda'}} \frac{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)\,q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')} d\mu(\mathbf{x}), \\
E_\lambda[\,T_n(\mathbf{X})\,] &= \int_{A_\lambda} T_n(\mathbf{x}) q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda) d\mu(\mathbf{x}), \\
f^{(n)}(\theta|\mathbf{x}) &= \frac{p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta)\lambda(\theta)}{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)} \qquad (\lambda\text{に対する事後密度関数})
\end{aligned}
$$

特に,

$$\Lambda'(B) = \Lambda(B-\delta) \qquad B-\delta = \{b-\delta\,|\,b \in B\}$$

とおくとき

$$
\begin{aligned}
q(\mathbf{x}|\lambda') &= \int_\Omega p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta')\lambda(\theta)d\nu(\theta) = \int_\Omega p^{(n)}(\mathbf{x}|\theta+\delta)\lambda(\theta)d\nu(\theta), \\
g_{\lambda'} &= \int_\Omega g(\theta')\lambda(\theta)d\nu(\theta) = \int_\Omega g(\theta+\delta)\lambda(\theta)d\nu(\theta)
\end{aligned}
$$

となる.

定理 4.1 (Bayes 型 Vincze の不等式 [V79]) 二つの事前分布 Λ, Λ' を与えたときに次の不偏性の条件 $E_\lambda[\,T_n(\mathbf{X})\,] = g_\lambda$, $E_{\lambda'}[\,T_n(\mathbf{X})\,] = g_{\lambda'}$ を満たす任意の推定量 $T_n(\mathbf{X})$ に対して,

$$(1-\alpha)\mathrm{Var}_\lambda[\,T_n(\mathbf{X})\,] + \alpha\mathrm{Var}_{\lambda'}[\,T_n(\mathbf{X})\,] \geq \alpha\,(1-\alpha)\,(g_{\lambda'} - g_\lambda)^2 \left\{\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')} - 1\right\} \tag{4.1}$$

が成り立つ.

(証明) 定理 2.1 の証明においてθ を λ (θ' を λ'), $g(\theta)$ を g_λ ($g(\theta')$ を g'_λ) と機械的に読みかえると全く同様の手順にて得られるため, ここでは省略する. ∎

系 4.1 不等式 (4.1) において等号が成立するための必要十分条件は, 与えられた事前分布 Λ, Λ' に対して α, δ を固定したとき $g(\theta)$ の推定量 $T_{2,n}$ が $\mathbf{x} \in A_\lambda \cup A_{\lambda'}$ において

$$T_{2,n}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha\,(1-\alpha)\,(g_{\lambda'} - g_\lambda)}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')} \cdot \frac{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda') - q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')} + \{(1-\alpha)\,g_\lambda + \alpha\,g_{\lambda'}\} \tag{4.2}$$

と表されることである.

(証明) 系 2.1 の導出過程においてθ を λ (θ' を λ'), $g(\theta)$ を g_λ ($g(\theta')$ を g'_λ) と読みかえることにより同様に示されるため, これも省略する. ∎

注意 4.1 定理 4.1 を Bayes 推定量に適用することを考える．後述の補題 5.2 より事前分布 Λ に関する $g(\theta)$ の Bayes 推定量 $T_{\lambda,n}$に対して，不偏性の条件 $E_\lambda[T_{\lambda,n}(\mathbf{X})]=g_\lambda$, $E_{\lambda'}[T_{\lambda,n}(\mathbf{X})]=g_{\lambda'}$ が成立しない場合には，$T_{\lambda,n}$ についてはこの Bayes 型 Vincze の不等式は成り立たず，定理 4.1 は実質的な意味を持たないことになる．尚，この条件に関して $E_\lambda[T_{\lambda,n}(\mathbf{X})]=g_\lambda$ は常に成立する一方，$E_{\lambda'}[T_{\lambda,n}(\mathbf{X})]=g_{\lambda'}$ は一般には成り立たないと予想される．

系 4.2 不等式 (4.1) において等号が成立するための必要十分条件は，与えられた事前分布 Λ,Λ' に対して α,δ を固定したとき

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}-1=\alpha\Bigg\{&\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}-1\right)\int_{A_\lambda\cap A_{\lambda'}^c} q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)d\mu(\mathbf{x})\\
&+\int_{A_\lambda\cap A_{\lambda'}}\left(\frac{1-\alpha}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}\cdot\frac{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')-q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')}+1\right)^2 q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)d\mu(\mathbf{x})\Bigg\}\\
&+(1-\alpha)\Bigg\{\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}-1\right)^2\int_{A_\lambda^c\cap A_{\lambda'}} q^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda')d\mu(\mathbf{x})\\
&+\int_{A_\lambda\cap A_{\lambda'}}\left(\frac{\alpha}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}\cdot\frac{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')-q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')}-1\right)^2 q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')d\mu(\mathbf{x})\Bigg\}
\end{aligned}
$$

となることである．

(証明) 系 2.2 の証明においてθ を λ (θ' を λ'), $g(\theta)$ を g_λ ($g(\theta')$ を g'_λ) と置き換えればよいので，ここでは省略する． ∎

5 Bayes型Vinczeの不等式の拡張

この節では，Bayes 型 Vincze の不等式から不偏性の条件を外し，その拡張を考える．次に，この拡張されたBayes型不等式の等号成立条件を求め，任意の事前分布，推定目標に対して下界が達成されることを示す．最後に，MSE による Vincze の不等式を用いて Bayes 型に拡張する方法について，詳しく検討する．

補題 5.1 $g(\theta)$ の任意の推定量 T_n に対して

$$
\begin{aligned}
&(1-\alpha)\,E_\lambda[\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2]+\alpha\,E_{\lambda'}[\{T_n(\mathbf{X})-g_{\lambda'}\}^2]\\
\geq\ &\alpha\,(1-\alpha)\Bigg[(g_{\lambda'}-g_\lambda)^2\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}-1\right)+(b_{\lambda'}-b_\lambda)^2\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}\\
&+2\,(g_{\lambda'}-g_\lambda)\,(b_{\lambda'}-b_\lambda)\left(\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}-1\right)\Bigg]
\end{aligned}
$$

$$= \alpha(1-\alpha)\left[\frac{1}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}\left\{(b_{\lambda'}-b_\lambda)+(g_{\lambda'}-g_\lambda)\{1-I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')\}\right\}^2 + (g_{\lambda'}-g_\lambda)\{1-I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')\}\right] \tag{5.1}$$

が成立する. ここで, λ(事前分布Λ), α, δ を固定して

$$T_{3,n}(\mathbf{x}) = \frac{\alpha(1-\alpha)\{(g_{\lambda'}-g_\lambda)+(b_{\lambda'}-b_\lambda)\}}{I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')}\cdot\frac{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')-q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')} + \{(1-\alpha)g_\lambda+\alpha g_{\lambda'}\} \tag{5.2}$$

とおくと, この不等式において等号が成立する.

定理 5.1 (Bayes 型 Vincze の不等式の拡張) $g(\theta)$ の任意の推定量 $T_n(\mathbf{X})$ に対して,

$$(1-\alpha)E_\lambda[\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2]+\alpha E_{\lambda'}[\{T_n(\mathbf{X})-g_{\lambda'}\}^2] \geq \alpha(1-\alpha)(g_{\lambda'}-g_\lambda)^2\left\{1-I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')\right\} \tag{5.3}$$

が成り立つ.

系 5.1 定理 5.1 において等号が成立するための必要十分条件は, 二つの事前分布 Λ, Λ' と α, δ を固定したとき, $g(\theta)$ の推定量 T_n^{**} が $\mathbf{x}\in A_\lambda\cup A_{\lambda'}$ において

$$T_n^{**}(\mathbf{x}) = \alpha(1-\alpha)(g_{\lambda'}-g_\lambda)\frac{q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda')-q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)}{q_\alpha^{(n)}(\mathbf{x}:\lambda,\lambda')} + \{(1-\alpha)g_\lambda+\alpha g_{\lambda'}\}, \tag{5.4}$$

すなわち

$$T_n^{**}(\mathbf{x}) = \begin{cases} g_\lambda & (\mathbf{x}\in A_\lambda\cap A_{\lambda'}^c), \\ (5.4)\ \text{の右辺} & (\mathbf{x}\in A_\lambda\cap A_{\lambda'}), \\ g_{\lambda'} & (\mathbf{x}\in A_\lambda^c\cap A_{\lambda'}) \end{cases}$$

の形に表されることである.

尚, 補題 5.1, 定理 5.1, 系 5.1 の証明についてはそれぞれ補題 3.1, 定理 3.1, 系 3.1 の導出過程においてθ を λ (θ' を λ'), $g(\theta)$ を g_λ ($g(\theta')$ を g'_λ) と機械的に読みかえることによって全く同様の手順にて得られるため, ここでは省略する.

注意 5.1 系 3.1 と同様の議論を繰り返すことになるが, 系 5.1 においては (5.1) の最終項の形より, 与えられた事前分布 Λ と下界を達成すべき推定量の偏り b に対して

$$b_{\lambda'}-b_\lambda = -(g_{\lambda'}-g_\lambda)\left\{1-I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')\right\}$$

を満たすことが必要であり, これは十分条件にもなっている. しかし

$$b_\lambda^{**} = E_\lambda[T_n^{**}(\mathbf{X})] - g_\lambda$$

とおくと

$$b_{\lambda'}^{**} - b_{\lambda}^{**} = -(g_{\lambda'} - g_{\lambda})\left\{1 - I_{\alpha}^{(n)}(\lambda, \lambda')\right\}$$

となり常に満たしていることから，ここではチェックを要しないことが分かる．

次に，MSE による Vincze の不等式を用いて Bayes 型の情報量不等式を構成する方法を述べる．ここでは，$\Lambda'(B) = \Lambda(B - \delta)$ $(B - \delta = \{b - \delta \,|\, b \in B\})$ を仮定し，Bayes 危険を $r(\lambda, T_n) = \int_{\Omega} R(\theta, T_n)\lambda(\theta)d\nu(\theta)$ で定義する．

定理 5.2 事前分布 Λ を与えたとき，任意の推定量 $T_n(\mathbf{X})$ に対して

$$(1-\alpha)\,r(\lambda, T_n) + \alpha\, r(\lambda', T_n) \geq \alpha\,(1-\alpha)\int_{\Omega}\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\left\{1 - I_{\alpha}^{(n)}(\theta, \theta')\right\}\lambda(\theta)d\nu(\theta)$$

が成り立つ．

(証明) 定理 3.1 の不等式

$$(1-\alpha)\,R(\theta, T_n) + \alpha\, R(\theta', T_n) \geq \alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta') - g(\theta)\}^2\left\{1 - I_{\alpha}^{(n)}(\theta, \theta')\right\} \tag{5.5}$$

の両辺の事前分布 Λ に関する積分を考えると，不等式の大小関係はそのまま保たれることから，これは明らかである． ∎

補題 5.2 ([L83]) Λ を事前分布とし，この分布に関して Bayes 危険 r が有限となる $g(\theta)$ の推定量 T が，少なくとも一つは存在することを仮定する．このとき二乗損失 $L(\theta, d) = \{d - g(\theta)\}^2$ に対する Bayes 危険 r を最小にする推定量 (Bayes 推定量) $T_{\lambda,n}$ は

$$T_{\lambda,n}(\mathbf{X}) = E[\,g(\Theta)\,|\,\mathbf{X} = \mathbf{x}\,] = \int_{\Omega} g(\theta) f^{(n)}(\theta|\mathbf{x})\lambda(\theta)d\nu(\theta)$$

と表される．

証明は省略する．

系 5.2 事前分布 Λ, Λ' に対するそれぞれの Bayes 推定量 $T_{\lambda,n}$, $T_{\lambda',n}$ の凸結合を

$$T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X}) = (1-\alpha)\,T_{\lambda,n}(\mathbf{X}) + \alpha\, T_{\lambda',n}(\mathbf{X})$$

とすると

$$\begin{aligned}
&\inf_{T_n}\{(1-\alpha)\,r(\lambda, T_n) + \alpha\, r(\lambda', T_n)\} \\
&\quad = \inf_{T_n} r\left((1-\alpha)\,\lambda + \alpha\,\lambda', T_n\right) = r\left((1-\alpha)\,\lambda + \alpha\,\lambda', T_n^{(\alpha)}\right) \\
&\quad = (1-\alpha)E[\,\{g(\Theta)\}^2\,] + \alpha E[\,\{g(\Theta + \delta)\}^2\,] - \alpha\,(1-\alpha)E_{\lambda}[\,\{T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})\}^2\,]
\end{aligned} \tag{5.6}$$

が成り立つ．但し，$E[\,g(\Theta)\,] = \int_{\Omega} g(\theta)\lambda(\theta)d\nu(\theta)\,(= g_{\lambda})$ とする．

(証明) 補題 5.2 を用いると, Bayes 危険の線形性により, 前半部分

$$\begin{aligned}\inf_{T_n}\{(1-\alpha)\,r(\lambda,T_n)+\alpha\,r(\lambda',T_n)\} &= \inf_{T_n} r\,((1-\alpha)\,\lambda+\alpha\,\lambda',T_n)\\ &= r\left((1-\alpha)\,\lambda+\alpha\,\lambda',T_n^{(\alpha)}\right)\end{aligned}$$

については直ちに示される. また, 二乗損失 $L(\theta,d)=\{d-g(\theta)\}^2$ と任意の推定量 T_n に対して

$$\begin{aligned}E_\alpha\,[T_n(\mathbf{X})] &= (1-\alpha)\,E\Big[L\,(\Theta,T_n(\mathbf{X}))\,|\mathbf{X}=\mathbf{x}\Big]+\alpha\,E\Big[L\,(\Theta+\delta,T_n(\mathbf{X}))\,|\mathbf{X}=\mathbf{x}\Big]\\ &= E\Big[(1-\alpha)\,L\,(\Theta,T_n(\mathbf{X}))+\alpha\,L\,(\Theta+\delta,T_n(\mathbf{X}))\,|\mathbf{X}=\mathbf{x}\Big]\end{aligned}$$

になるから

$$\begin{aligned}&E_\alpha\left[T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})\right]=E_\alpha\,[\,(1-\alpha)\,T_{\lambda,n}(\mathbf{X})+\alpha\,T_{\lambda',n}(\mathbf{X})\,]\\ &\quad=(1-\alpha)E[\,\{g(\Theta)\}^2|\mathbf{X}=\mathbf{x}\,]+\alpha E[\,\{g(\Theta+\delta)\}^2|\mathbf{X}=\mathbf{x}\,]-\alpha\,(1-\alpha)\,\{T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})\}^2\end{aligned}$$

となる. ここで, Fubini の定理を用いると

$$\begin{aligned}&r\left((1-\alpha)\,\lambda+\alpha\,\lambda',T_n^{(\alpha)}\right)=\int_{\mathcal{X}}E_\alpha\left[T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})\right]q^{(n)}(\mathbf{x}|\lambda)d\nu(\mathbf{x})\\ &\quad=(1-\alpha)E[\,\{g(\Theta)\}^2\,]+\alpha E[\,\{g(\Theta+\delta)\}^2\,]-\alpha\,(1-\alpha)E_\lambda[\,\{T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})\}^2\,]\end{aligned}$$

となり, 後半部分も証明されたことになる. ∎

例 5.1 密度関数 $p(x|\theta)$ が

$$p(x|\theta)=\begin{cases}p & (0\le x\le\theta,\ \theta+1\le x\le 2)\\ q & (\theta<x<\theta+1)\\ 0 & (x<0,\ x\ge 2)\end{cases}$$

を持つ分布からの標本を X とする. 但し, $0<p<q$, $p+q=1$, $0<\theta<1$ とする. ここで, 事前分布 Λ, Λ' をそれぞれ一様分布 $U(0,1-\delta)$, $U(\delta,1)$ とし, $g(\theta)=\theta$ の推定を考える. また, $\{\theta|\lambda(\theta)>0\}\cap\{\theta|\lambda'(\theta)>0\}\neq\phi$ を満たすようにするため, $0<\delta<1/2$ を仮定する. 一般に定理 5.2, 系 5.2 より, 不等式

$$\begin{aligned}&(1-\alpha)E[\,\{g(\Theta)\}^2\,]+\alpha E[\,\{g(\Theta+\delta)\}^2\,]-\alpha\,(1-\alpha)E_\lambda[\,\{T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})\}^2\,]\\ &\quad\ge\alpha\,(1-\alpha)\int_\Omega\{g(\theta')-g(\theta)\}^2\left\{1-I_\alpha^{(n)}(\theta,\theta')\right\}\lambda(\theta)d\nu(\theta)\end{aligned}\tag{5.7}$$

が得られ, この例で不等式の両辺の値を計算すると

$$\begin{aligned}&\frac{(1-\delta)^2}{12}-\frac{\delta\,(1-\delta+2\,\alpha\,\delta)}{4}-\frac{1}{4\,(1-\delta)}(*)\\ &\quad\ge\alpha\,(1-\alpha)\,\delta^2\cdot\frac{\alpha\,(1-\alpha)\,(1-\delta)\,(q-p)^2+p\,q}{\alpha\,(1-\alpha)\,(q-p)^2+p\,q}\end{aligned}\tag{5.8}$$

となる. 但し

$$
\begin{aligned}
(*) \;=\; & \int_0^{1-\delta} \left[\frac{\{p\,(1-\delta+\alpha\,\delta)^2+(q-p)\,(x+\alpha\,\delta)^2-q\,\alpha^2\,\delta^2\}^2}{p\,(1-\delta)+(q-p)\,x} \right. \\
& + \left. \frac{\{q\,(1-\delta+\alpha\,\delta)^2-(q-p)\,(x+\alpha\,\delta)^2-p\,\alpha^2\,\delta^2\}^2}{q\,(1-\delta)-(q-p)\,x} \right] d\mu(x)
\end{aligned}
$$

とする. 尚, (5.8) の右辺 (一般に不等式 (5.7) の右辺) は Bayes 危険の凸結合の一つの下界となっているが, 等号が成立するのは極めて難しいことと思われる (注意 5.3).

注意 5.2 $r(\lambda, T_n)$ と $E_\lambda[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2\,]$ の大小関係について考える. 与えられた事前分布 Λ に関して

$$r(\lambda, T_n) \geq E_\lambda[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2\,] \tag{5.9}$$

となっていれば

$$
\begin{aligned}
(1-\alpha)\,r(\lambda,T_n)+\alpha\,r(\lambda',T_n) &\geq (1-\alpha)E_\lambda[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2\,]+\alpha E_{\lambda'}[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_{\lambda'}\}^2\,] \\
&\geq \alpha\,(1-\alpha)\,(g_{\lambda'}-g_\lambda)^2\left\{1-I_\alpha^{(n)}(\lambda,\lambda')\right\} \qquad (5.10)
\end{aligned}
$$

となり, (5.10) の右辺は Bayes 危険 r を凸結合したものの一つの評価であるといえる. 特に, (5.9) の等号が成立すれば, 不等式 (5.10) の下界を達成する推定量が存在する場合も考えられる. ここで

$$
\begin{aligned}
r(\lambda,T_n)-E_\lambda[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2\,] &= \mathrm{Var}[g(\Theta)]-2\,\mathrm{Cov}[g(\Theta),b(\Theta)] \\
&= -\mathrm{Var}[g(\Theta)+b(\Theta)]+\mathrm{Var}[b(\Theta)]
\end{aligned}
$$

となることを用いると

$$r(\lambda,T_n) \geq E_\lambda[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2\,] \text{ より } \mathrm{Var}[g(\Theta)] \leq -2\,\mathrm{Cov}[g(\Theta),b(\Theta)]$$

となり, このとき $\mathrm{Cov}[g(\Theta),b(\Theta)] \leq 0$ を満たすことが必要である. しかし, これらの値は偏り b に依存しているため, $r(\lambda,T_n)$ と $E_\lambda[\,\{T_n(\mathbf{X})-g_\lambda\}^2\,]$ の大小関係については, 一般論ではこれ以上の結果が得られないとも考えられる.

注意 5.3 系 3.1 より, 定理 5.2 において等号が成立するためには, $\lambda(\theta)>0$ を満たす任意の $\theta\in\Omega$ に対して

$$T_n^{(\alpha)}(\mathbf{X})=T_n^*(\mathbf{X})=\alpha\,(1-\alpha)\,\{g(\theta')-g(\theta)\}\frac{p^{(n)}(\mathbf{X}|\theta')-p^{(n)}(\mathbf{X}|\theta)}{p_\alpha^{(n)}(\mathbf{X}:\theta,\theta')}+\{(1-\alpha)\,g(\theta)+\alpha g(\theta')\}$$

となることが必要であり, そのためには少なくとも混合 Bayes 推定量 $T_n^{(\alpha)}$ の値が母数 θ に依存しないことが要請される. これは非常に厳しい条件であり, 事前分布 Λ が一点に集

中している場合以外に満たされることは稀である．その上，事前分布が一点に集中している場合には実質的に定理 3.1 と定理 5.2 は同じことを意味しているので，定理 5.2 において本質的に等号が成立する例を見つけることは，極めて難しいと予想される．尚，関連する話題として，Brown and Gajek，佐藤·赤平らが Cramér-Rao の情報不等式の Bayes 危険への拡張について論じている（[BG90], [SA96]）．

参考文献

[AT95] Akahira, M. and Takeuchi, K. (1995). *Non-Regular Statistical Estimation.* Lecture Notes in Statistics **107**, Springer, New York

[BG90] Brown, L. D. and Gajek, L. (1990). Infermation inequalities for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **18**, 1578–1594

[CR51] Chapman, D. G. and Robbins, H. (1951). Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Ann. Math. Statist.*, **22**, 581–596

[GS51] Girshick, M. A. and Savage, L. J. (1951). Bayes and minimax estimates for quadratic loss functions. *Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statist. Prob.*, **1**, 53–73

[L83] Lehmann, E. L. (1983). *Theory of Point Estimation.* Wiley, New York.

[K52] Kiefer, J. (1952). On minimum variance estimators. *Ann. Math. Statist.*, **23**, 581–586

[PV85] Puri, M. L. and Vincze, I. (1985). On the Cramér-Fréchet-Rao inequality for translation parameter in the case of finite support. *Statistics* **16**, 495–506

[SA96] Sato, M. and Akahira, M. (1996). An infermation inequalities for the Bayes risk. *Ann. Statist.*, **24**, 2288–2295

[V79] Vincze, I. (1979). On the Cramér-Fréchet-Rao inequality in the non-regular case. In : *Contributions to Statistics. The Jaroslav Hájek Memorial Volume*, Academia, Prague, 253–262

[V92] Vincze, I. (1992). On nonparametric Cramér–Rao inequality. *Order Statistics and Nonparametrics : Theory and Applications*, North-Holland, 439–454